УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯМИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

©З. Г. Шефтель

1. В работе изучается возможность приближения функций на многообразиях решениями нелокальных граничных задач для эллиптических уравнений произвольного порядка (см. п. 3). Подобные вопросы для обычных эллиптических граничных задач исследовались различными авторами с 1960 года (см. [1-3] и имеющуюся там библиографию). Упомянутые нелокальные задачи изучаются с 1970 года, когда они были введены в [4]. Определение таких задач дано в п. 2.

2. Пусть $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^\infty$, G_1 - подобласть G с границей $\gamma \in C^\infty$, $\gamma \cap \Gamma = \oslash$; $G_2 = G \backslash \overline{G}_1$. Предположим, что существует диффеоморфизм $\hat{\alpha}\,:\,\Gamma \to \gamma$. Так как Γ и γ бесконечно гладки, то существует такое $\epsilon > 0$, что при $|t| < \epsilon$ отображение $\alpha\,:\; x + \nu_\Gamma t \to \hat{\alpha}\,x + \nu_\gamma\,t$ (ν_Γ - орт внутренней нормали к Γ в точке x, ν_γ - орт внутренней относительно G_1 нормали к γ в точке αx) является диффеоморфизмом некоторой окрестности $U(\Gamma)$ в R^n поверхности Γ на окрестность $V(\gamma)$ в R^n поверхности γ; эти окрестности можно выбирать так, что $U(\Gamma) \cap V(\gamma) = \oslash$. Для любой функции $u(y)$ ($y \in V(\gamma)$) положим $(J\,u)(x) = u(\alpha\,x)\,(x \in U(\Gamma))$.

Пусть $A(y, D_y) = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(y) D_y^\beta$ ($D_y^\beta = D_{y_1}^{\beta_1} \ldots D_{y_n}^{\beta_n}$, $D_{y_k} = i\,\partial/\partial\, y_k$, $y \in V(y)$) - произвольное линейное дифференциальное выражение с достаточно гладкими коэффициентами, $A_0(y, \eta) = \sum\limits_{|\beta|=m} a_\beta(y)\eta^\beta$ ($\eta^\beta = \eta_1^{\beta_1} \ldots \eta_n^{\beta_n}$) - его характеристический полином. Тогда

$$J(A(y, D_y) \vee (y))(x) = \hat{A}(x, D_x)(J\,v)(x), \tag{1}$$

где $\hat{A}(x, D_x)$ ($x \in U(\Gamma)$) - линейное дифференциальное выражение того же порядка m, характеристический полином которого $\hat{A}_0(x, \xi)$ выражается через $A_0(y, \eta)$ по формуле

$$\hat{A}_0(x, \xi) = A_0(\alpha\,x, T\,\xi), \tag{2}$$

где T - транспонированная матрица Якоби преобразования α^{-1}.

В G_i ($i = 1, 2$) заданы линейные дифференциальные выражения $L_i(x, D) = \sum_{|\beta| \leq 2m_i} a_{i\beta}(x) D^\beta$ с комплекснозначными коэффициентами. Положим $l = m_1 + +2\,m_2$. На γ задано $2l$ линейных дифференциальных выражений $B_{ji}(x, D)$ ($x \in \gamma, j = 1, ..., l;\; i = 1, 2$), а на Γ задано l выражений $B_{j3}(x, D)$($x \in \Gamma; j = 1, ..., l$):

$$B_{ji}(x, D) = \sum_{|\beta| \leq m_{ji}} b_{ji\,\beta}(x)\, D^\beta \; (j = 1, ..., l;\; i = 1, 2, 3).$$

Коэффициенты всех рассматриваемых выражений для простоты предполагаются бесконечно гладкими.

Рассматривается нелокальная задача

$$L_i\,u_i(x) = f_i(x) \;\; (x \in G_i;\; i = 1, 2), \tag{3}$$

$$B_j u = J(B_{j1} u_1(y) + B_{j2} u_2(y))(x) + B_{j3} u_2(x) = \phi_j(x)$$
$$(x \in \Gamma, \quad y = \alpha x \in \gamma; \quad j = 1, ..., l; \quad l = m_1 + 2m_2), \qquad (4)$$

или, в более короткой записи,

$$L u = f; \quad B u|_\Gamma = \phi. \qquad (5)$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что задача (5) эллиптична (см. [4,5]); это означает, что выражения L_i правильно эллиптичны в G_i ($i = 1, 2$), а граничные выражения B_{ji} ($j = 1, ..., l$; $i = 1, 2, 3$) удовлетворыают некоторому алгебраическому условию типа условия Лопатинского. Кроме того, граничные выражения предполагаются 2μ - нормальными [6,7] ($\mu = (m_1, m_2)$ - мультииндекс). При этом условии имеет место формула Грина (см. [6,7]):

$$(Lu, v) + \langle B u, C' v\rangle = (u, L^+ v) + \langle C u, B' v\rangle$$
$$(u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2); \quad u, v \in C^\infty(G_1) \times C^\infty(G_2). \qquad (6)$$

Здесь $L^+ = (L_1^+, L_2^+)$ - выражение, формально сопряженное к $L = (L_1, L_2)$, $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(G_1) \times L_2(G_2)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение в $(L_2(\Gamma))^l$, $C = C(x, D)$ - матрица граничных выражений, дополняющая $(3 \times l)$- матрицу $B(x, D) = (B_{ji}(x, D))_{j=1,...,l;\, i=1,2,3}$ до матрицы Дирихле порядка 2μ (см. [6,7]); B', C' - также 2μ - нормальные матрицы; при этом

$$(B u)_j = J(B_{j1} u_1(y) + B_{j2} u_2(y))(x) + B_{j3} u_2(x) \quad (x \in \Gamma, \ y = \alpha x \in \gamma);$$

аналогично понимаются $B'v, C u, C'v$.

Задачу

$$L^+ v = g, \quad B' v|_\Gamma = \psi \qquad (7)$$

называют сопряженной к задаче (5) относительно формулы Грина. Из эллиптичности задачи (5) следует эллиптичность сопряженной задачи (7).

3. Пусть Λ_1 - гладкое $(n-1)$-мерное многообразие без края, лежащее в G_1 или G_2, Λ - открытое подмножество Λ_1 с достаточно гладкой границей. Для произвольного достаточно гладкого в $G_1 \cup G_2$ решения $u = (u_1, u_2)$ задачи (5) положим

$$\nu_r u = (u|_\Lambda, ..., D_\nu^{r-1} u|_\Lambda), \qquad (8)$$

где $D_\nu = i\partial/\partial\nu$, ν - нормаль к Λ. Пусть G_0 - область сколь угодно малого диаметра, лежащая внутри G_1 или G_2, Γ_0 - сколь угодно малый открытый кусок Γ. Будем произвольным образом изменять функцию $f = (f_1, f_2)$ внутри G_0 (или изменять ϕ_j на Γ_0). Исследуется вопрос о возможности приближения полученными векторами $\nu_r u$ любой заданной на Λ вектор-функции $\psi = (\psi_1, ..., \psi_r)$.

4. Введем необходимые функциональные пространства. Для любой ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$ обозначим через $H^{S,p}(\Omega)$ $(S \geq 0, \ 1 < p < \infty)$ пространство бесселевых потенциалов, $H^{-S,p}(\Omega)$ - пространство, двойственное к $H^{S,p'}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ относительно расширения $(\cdot, \cdot)$ скалярного произведения в $L_2(\Omega)$; $\|\cdot\|_{S,p}$ - норма в $H^{S,p}(\Omega)$ $(S \in R)$. Через $B^{S,p}(\partial\Omega)$ $(S \in R)$ обозначаются пространства Бесова; $B^{-S,p'}(\partial\Omega)$ и $B^{S,p}(\partial\Omega)$ двойственны друг другу относительно расширения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярного произведения в $L_2(\partial\Omega)$; $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_{S,p}$ - норма в $B^{S,p}(\partial\Omega)$.

Для рассматриваемой области G, разбитой на части G_1 и G_2, и мультииндекса $\mu = (m_1, m_2)$ положим $H^{S,p}(G_1, G_2) = H^{S,p}(G_1) \times H^{S,p}(G_2)$;

$H^{2\mu+S,p}(G_1,G_2) = = H^{2m_1+S,p}(G_1) \times H^{2m_2+S,p}(G_2)$; нормы в этих пространствах будем обозначать соответственно $\|\cdot\|_{S,p}$ и $\|\cdot\|_{2\mu+S,p}$; скалярное произведение в $H^{0,2}(G_1,G_2) = L_2(G_1) \times L_2(G_2)$ и в $L_2(G_i)$ будем обозначать $(\cdot,\cdot)$; из контекста всегда будет ясно, в каком смысле понимается $\|\cdot\|_{S,p}$ и $(\cdot,\cdot)$. Положим также $C^\infty(G_1,G_2) = = C^\infty(G_1) \times C^\infty(G_2)$.

5. Пусть, как и в п. 3, G_0 - область сколь угодно малого диаметра, лежащая внутри G_1 или G_2. Положим

$$M(G_0) = \{u \in C^\infty(G_1,G_2) : \ \operatorname{supp} L\,u \subset G_0, \ \ B\,u|_\Gamma = 0\},$$

$$\nu_r\, M(G_0) = \{\nu_r\, u : \ u \in M(G_0)\},$$

где $\nu_r\, u$ определяется равенством (8).

Теорема 1. *Пусть $G_0 \subset G_1$, $\Lambda \subset G_1$, $G\backslash\overline{\Lambda}$ связно и пусть для выражения L_1^+ в G_1 имеет место свойство единственности решения задачи Коши: если $L_1^+ v = 0$ в области $G' \subset G_1$ и $v = 0$ в области $G'' \subset G'$, то $v = 0$ в G'. Тогда множество $\nu_{2m_1} M(G_0)$ плотно в прямом произведении $\prod_{1\le j\le 2m_1} B^{S_j,p}(\Lambda)$ для любых $S_j \ge 0$ $(j = 1,...,2m_1)$ и $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых $S \ge 0$ и $1 < p < \infty$ множество $\nu_{2m_1} M(G_0)$ плотно в $\prod_{1\le r\le 2m_1} B^{2m_1+S-r+1-1/p,p}(\Lambda)$. Для этого надо проверить, что если $t_r \in B^{-(2m_1+S-r+1-1/p),p'}(\Lambda)$ $(r = 1,...,2m_1)$ и

$$\sum_{1\le r\le 2m_1} \langle t_r, D_\nu^{r-1} u\rangle = 0 \quad (\forall\, u \in M(G_0)), \tag{9}$$

то $t_r = 0$ $(r = 1,...,2m_1)$. Равенство (9) можно переписать в виде

$$(\sum_{1\le r\le 2m_1} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Lambda), u) = 0 \quad (\forall\, u \in M(G_0)), \tag{10}$$

где δ_Λ - мера Дирака, сосредоточенная на Λ. Но $|(D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Lambda), u)| = = |\langle t_r, D_\nu^{r-1} u\rangle| \le \langle\langle t_r\rangle\rangle_{-(2m_1+S-r+1-1/p),p'} \langle\langle D_\nu^{r-1} u\rangle\rangle_{2m_1+S-r+1-1/p,p} \le \le \langle\langle t_r\rangle\rangle_{-(2m_1+S-r+1-1/p),p'} \|u\|_{2\mu+S,p}$, поэтому $w = \sum_{1\le r\le 2m_1} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Lambda) \in H^{-2\mu-S,p'}(G_1,G_2)$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ ядро задачи (5). Поскольку $\mathcal{H} \subset C^\infty(G_1,G_2)$, то $\mathcal{H} \subset M(G_0)$ и из (10) следует, что

$$(w,u) = 0 \quad (\forall\, u \in \mathcal{H}). \tag{11}$$

Но тогда [6-8] существует решение $v \in H^{-S,p'}(G_1,G_2)$ задачи с однородными граничными условиями

$$L^+ v = w, \quad Bv|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

формально сопряженной к задаче (5) относительно формулы Грина (6). Согласно теореме о локальном повышении гладкости [8] $v = (v_1, v_2) \in C^\infty(\overline{G_1}\backslash\overline{\Lambda}) \times C^\infty(\overline{G_2})$ и удовлетворяет однородным граничным условиям (12) в обычном смысле. При этом из формул (6), (12), и (11) получаем $(v, Lu) = (L^+ v, u) = (w, u) = 0$ $(\forall\, u \in M(G_0))$, т.е.

$$(v, Lu) = 0 \quad (\forall\, u \in M(G_0)). \tag{13}$$

Предположим для простоты, что задача (5) с $\phi = 0$ разрешима при любом f. Тогда из (13) следует, что $v = 0$ в G_0; в общем случае нетрудно показать (ср. [2]), что существует решение задачи (12), аннулирующееся в G_0. Поскольку $\overline{G}_1\backslash\overline{\Lambda}$ связано, то из условия единственности решения задачи Коши для L_1^+ следует, что $v = (v_1, v_2) = 0$ в $\overline{G}_1\backslash\overline{\Lambda}$. Итак, $v_1 \in H^{-S,p'}(G_1)$ и $\operatorname{supp} v_1 \subset \overline{\Lambda}$, откуда следует (см. лемму из [9]), что $v_1 = \sum_{1\le j\le\kappa} D_\nu^j(\tau_j \times \delta_\Lambda)$, где $\tau_j \in B^{-(S-j-1/p),p'}(\Lambda)$ $(j = 0, ..., \kappa)$, κ - наибольшее целое число, меньшее $S - \frac{1}{p}$. Теперь из (12) получаем

$$L_1^+\Big(\sum_{0\le j\le\kappa} D_\nu^j(\tau_j \times \delta_\Lambda)\Big) = \sum_{1\le r\le 2m_1} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Lambda). \tag{14}$$

Отсюда, учитывая линейную независимость меры Дирака и ее производных и эллиптичность L_1^+, последовательно находим $\tau_\kappa = ... = \tau_0 = 0$. Но тогда из (14) следует, что и $t_r = 0$ $(r = 1, ..., 2m_1)$. □

Совершенно аналогичное утверждение справедливо и тогда, когда G_0 и Λ лежат в G_2. Рассмотрим теперь случай, когда G_0 и Λ лежат в разных частях G.

Теорема 2. *Пусть а) $G_0 \subset G_2$, $\Lambda \subset G_1$, $G_1\backslash\overline{\Lambda}$ связано; б) для выражения L_2^+ в области G_2 имеет место свойство единственности решения задачи Коши; в) граничная задача $L_1^+ v_1 = 0$ в $G_1\backslash\overline{\Lambda}$, $B_{j1}v_1 = 0$ на γ $(j = 1, ..., l)$ имеет лишь нулевое решение. Тогда $\nu_{2m_1}M(G_0)$ плотно в прямом произведении $\prod_{1\le j\le 2m_1} B^{S_j,p}(\Lambda)$ при любых $S_j \ge 0$ $(j = 1, ..., 2m_1)$ и $1 < \overline{p} < \infty$.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, мы придем к равенству (13) и находим решение $\overline{v}$ задачи (12), аннулирующееся в G_0. Отсюда в силу условия б) следует, что $v \equiv 0$ в G_2 и задача (12) сводится к

$$L_1^+ v_1 = w \text{ в } G_1, \quad B'_{j1}v_1 = 0 \text{ на } \gamma\ (j = 1, ..., l).$$

Поскольку $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Lambda}$, то отсюда в силу условия в) следует, что $v = 0$ в $G_1\backslash\overline{\Lambda}$, т.е. $\operatorname{supp} v_1 \subset \overline{\Lambda}$. Теперь доказательство завершается так же, как доказательство теоремы 1. □

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда $G_0 \subset G_1$, $\Lambda \subset G_2$, $\overline{G}_2\backslash\overline{\Lambda}$ связно.

6. Перейдем теперь к случаю, когда $\overline{\Lambda} = \Lambda_1$ ограничивает некоторую n-мерную область, т.е. дополнение множества Λ несвязно. Ограничимся рассмотрением двух из возможных случаев; в остальных случаях имеют место аналогичные утверждения.

Теорема 3. *Пусть а) $G_0 \subset G_1$, $\Lambda \subset G_1$, $\overline{\Lambda}$ ограничивает подобласть G' области G_1; б) для выражения L_1^+ в области G_1 имеет место свойство единственности решения задачи Коши; в) задача Дирихле для уравнения $L_1^+ v_1 = 0$ в области G' имеет не более одного решения. Тогда $\nu_{m_1}M(G_0)$ плотно в прямом произведении $\prod_{1\le r\le m_1} B^{m_1-r+1-1/p,p}(\Lambda)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если

$$t_r \in B^{-(m_1-r+1-1/p),p'}(\Lambda) \quad (r = 1, ..., m_1)$$

таковы, что

$$\sum_{1\le r\le m_1} \langle t_r, D_\nu^{r-1} u\rangle = 0 \quad (\forall u \in M(G_0)), \tag{15}$$

то $t_1 = ... = t_{m_1} = 0$. Переписав (15) в виде

$$\Big(\sum_{1\le r\le m_1} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Lambda), u\Big) = 0$$

и воспользовавшись, как и при доказательстве теоремы 1, оценкой

$$|(D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Lambda), u)| \leq \langle\langle t_r\rangle\rangle_{(m-r+1-1/p),p'} \|u\|_{\mu,p'},$$

получим, что

$$w = \sum_{1\leq r\leq m_1} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Lambda) \in H^{-\mu,p'}(G) \tag{16}$$

и $(w, u) = 0$ $(\forall u \in M(G_0))$. Но тогда задача (12) имеет решение $v = (v_1, v_2) \in \in H^{\mu,p'}(G_1, G_2)$, причем по теореме о локальном повышении гладкости $v \in C^\infty(\overline{G}_1\backslash\overline{\Lambda}, \overline{G}_2)$. Рассуждая далее, как и при доказательстве теоремы 1, найдем решение v, аннулирующееся в $\overline{G}_1\backslash\overline{G}'$. Для этого решения $v_1 \in H^{m_1,p'}(G_1)$ и $v_1 = 0$ в $\overline{G}_1\backslash\overline{G}'$, поэтому $D_\nu^{j-1} v_1|_\Lambda = 0$ $(j = 1, \ldots, m_1)$. Таким образом, v_1 - решение задачи Дирихле $L_1^+ v_1 = 0$ в G', $D_\nu^{j-1} v_1|_\Lambda = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ и, следовательно, $v_1 = 0$ и в G', т.е. $v_1 = 0$ в G_1. Но тогда из (12) следует, что $w = 0$ (так как в силу (16) $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Lambda} \subset G_1$) и поэтому $t_1 = \ldots = t_{m_1} = 0$. □

Теорема 4. *Пусть а) $G_0 \subset G_2$, $\Lambda \subset G_1$, $\overline{\Lambda}$ ограничивает подобласть G' области G_1; б) для выражения L_2^+ в области G_2 имеет место свойство единственности решения задачи Коши; в) задача Дирихле для уравнения $L_1^+ v_1 = 0$ в области G' имеет не более одного решения; г) граничная задача $L_1^+ v_1 = 0$ в $G_1 \setminus \overline{G}'$, $B_{j1} v_1 = 0$ на γ имеет лишь нулевое решение. Тогда множество $\nu_{m_1} M(G_0)$ плотно в прямом произведении $\prod_{1\leq r\leq m_1} B^{m_1-r+1-1/p,p}(\Lambda)$.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3, мы найдем элемент w, определяемый равенством (16), для которого $(w, u) = 0$ $(\forall u \in M(G_0))$. Но тогда задача (12) с этим w имеет решение $v = (v_1, v_2) \in H^{\mu,p'}(G_1, G_2)$, причем по теореме о локальном повышении гладкости $v \in C^\infty$ $(\overline{G}_1\backslash\Lambda,\ G_2)$; при этом решение v можно выбрать аннулирующемся в G_0. Тогда в силу условия б) $v_2 = 0$ во всей области G_2. Теперь задача (12) сводится к следующей задаче для функции v_1 : $L_1^+ v_1 = w$ в G_1, $B'_{j1} v_1 = 0$ на γ. Но поскольку $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Lambda}$, то из условия г) получаем, что $v_1 = 0$ в $\overline{G}_1\backslash\overline{G}'$. Теперь из того, что $v_1 \in H^{m_1,p'}(G_1)$ следует, что $D_\nu^{j-1} v_1|_\Lambda = 0$ $(j = 1, \ldots, m_1)$. Таким образом, v_1 - решение задачи Дирихле $L_1^+ v_1 = 0$ в G', $D_\nu^{j-1} v_1|_\Lambda = 0$ $(j = 1, \ldots, m_1)$ и в силу условия в) $v = 0$ в G', т.е. $v_1 = 0$ во всей области G_1. Отсюда благодаря (12) получаем, что $w = 0$ и, следовательно, $t_1 = \ldots = t_{m_1} = 0$. □

7. Пусть теперь Γ_0 - произвольное открытое подмножество Γ; диаметр Γ_0 может быть как угодно малым. Положим

$$M(\Gamma_0) = \{u \in C^\infty(G_1, G_2) : \ Lu = 0,\ \operatorname{supp} Bu|_\Gamma \subset \Gamma_0\},$$

$$\nu_r M(\Gamma_0) = \{\nu_r u :\ u \in M(\Gamma_0)\},$$

где $\nu_r u$ определяется равенством (8).

Теорема 5. *Пусть $\Lambda \subset G_2$, $G_2\backslash\overline{\Lambda}$ связано и пусть для выражения L_2^+ в G_2 имеет место свойство единственности решения задачи Коши. Тогда множество $\nu_{2m_2} M(\Gamma_0)$ плотно в $\prod_{1\leq j\leq 2m_2} B^{S_j,p}(\Lambda)$ для любых $S_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, 2m_2)$i$1 < p < \infty$.*

Доказательство. Построим содержащую G область G'' с гладкой границей $\Gamma' \supset \Gamma\backslash\Gamma_0$. При этом область G'' выберем настолько близкой к G, чтобы $G''\backslash G \subset u(\Gamma)$ (см. начало п.2) и чтобы коэффициенты дифференциальных выражений L_1, L_2, B_{j3}, B_{ji} $(i = 1, 2)$ можно было продолжить соответственно в $G''\backslash G$, $\alpha(G''\backslash G)$ и на Γ', $\alpha\Gamma'$ с сохранением гладкости и эллиптичности задачи. Пусть теперь G_0 - открытое подмножество $G''\backslash G$. Тогда в силу аналога теоремы 1 (с заменой G_1 на G_2), примененного к области G'', получаем, что

$$\overline{\nu_{2m_2} M(G_0)} = \prod_{1\leq j\leq 2m_2} B^{S_j,p}(\Lambda). \tag{17}$$

Но функции из $M(G_0)$ удовлетворяют на Γ нулевым граничным условиям, следовательно, если $u \in M(G_0)$, то $\operatorname{supp} Bu|_\Gamma \subset \Gamma_0$. Поэтому $M(G_0) \subset M(\Gamma_0)$ и из (17) следует требуемое. $\square$

Теорема 6. *Пусть а) $\Lambda \subset G_1$, $G_1\backslash\overline{\Lambda}$ связно; б) для выражения L_2^+ в области G_2 имеет место свойство единственности решения задачи Коши; в) граничная задача $L_1^+ v_1 = 0$ в $G_1\backslash\overline{\Lambda}$, $B'_{j1} v_1 = 0$ на γ $(j = 1,\dots,l)$ имеет лишь нулевое решение. Тогда $\nu_{2m_1} M(\Gamma_0)$ плотно в $\prod_{1\leq j\leq 2m_1} B^{S_j,p}(\Lambda)$ при любых $S_j \geq 0$ и $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Построим область G'' так же, как при доказательстве теоремы 5. Если снова принять за G_0 открытое подмножество $G''\backslash G$, то требуемое утверждение сразу следует из теоремы 2. $\square$

Доказательства двух следующих теорем следует из аналога теоремы 3 и из теоремы 4.

Теорема 7. *Пусть а) $\Lambda \subset G_2$, $\overline{\Lambda}$ ограничивает подобласть G' области G_2; б) для выражения L_2^+ в области G_2 имеет место свойство единственности решения задачи Коши; в) задача Дирихле для уравнения $L_2^+ v_2 = 0$ в области G' имеет не более одного решения. Тогда $\nu_{m_2} M(\Gamma_0)$ плотно в $\prod_{1\leq r\leq m_2} B^{m_2-r+1-1/p,p}(\Lambda)$.*

Теорема 8. *Пусть а) $\Lambda \subset G_1$, $\overline{\Lambda}$ ограничивает подобласть G' области G_1; б) для выражения L_2^+ в области G_2 имеет место свойство единственности решения задачи Коши; в) задача Дирихле для уравнения $L_1^+ v_1 = 0$ в области G' имеет не более одного решения; г) граничная задача $L_1^+ v_1 = 0$ в $G_1\backslash\overline{G}'$, $B'_{j1} v_1 = 0$ на γ имеет лишь нулевое решение. Тогда $\nu_{m_1} M(\Gamma_0)$ плотно в $\prod_{1\leq r\leq m_1} B^{m_1-r+1-1/p,p}$ (Λ).*

1. *Hamann U.*, Approximation durch Normalableitungen von Losungen elliptischer Randwertprobleme in beliebigen Sobolev-Raumen // Math. Nachr. - 1986. - **128**. - P. 199–214.
2. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , О плотности решений эллиптических задач с локализованными правыми частями в функциональных пространствах на многообразиях // Докл. АН СССР. - 1989. -**305**. - *N 6*. - С. 1317–1320.
3. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , О плотности решений граничных задач для эллиптических по Петровскому систем в функциональных пространствах на многообразиях // Докл. АН УССР. Серия А. - 1990. - *N 9*. - С. 17–20.
4. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , Об одном классе общих нелокальных эллиптических задач // Докл. АН СССР. - 1970. - **192**. - *N 3*. - С. 511–513.
5. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем // Сиб.матем.журн. - 1972. - **13**. - *N 1*. - С. 165–181.
6. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , Формула Грина и теоремы о гомеоморфизмах для нелокальных эллиптических задач // Докл. АН СССР. - 1971. - **201**. - *N 5*. - С. 1059–1062.
7. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , Формула Грина и условия разрешимости нелокальных эллиптических граничных задач // Укр.матем.журн. - 1973. - **25**. *N 4*. - С. 479–491.
8. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , Теоремы об изоморфизмах для нелокальных эллиптических граничных задач и их приложения // Укр.матем.журн. - 1973. - **25**. - *N 6*. - С. 761–771.
9. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* , О приближении функций на многообразии решениями эллиптических граничных задач // Нелинейн. граничные задачи. - 1989. - **1**. - С. 861–890.